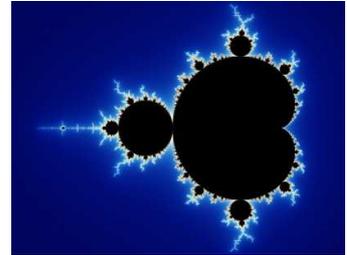


# FRACTALES



*En memoria de Benoît Mandelbrot*

## PRIMERA PARTE: LAS COSAS SIMPLES

Winston Churchill una vez dijo que las cosas más bellas pueden ser expresadas a través de palabras que adoptan una forma muy simple, como por ejemplo: la justicia. Y es cierto, pero parece incongruente que un fonema de sólo tres sílabas adopte un significado tan complejo y abstracto, e incluso de existencia ontológicamente debatible.

Este tipo de dicotomías en el Lenguaje, nos ha llevado a algunas reflexiones... pero, más allá de todas las cosas que se han dicho a lo largo de la Historia, quizás, lo verdaderamente esencial aún no ha sido pronunciado.

De hecho, recordemos un momento la Teoría del Caos, donde se plantea que el Universo no sigue estrictamente el modelito de un reloj, previsible y determinista, sino que existe una secuencia de orden y desorden en la Naturaleza. El Lenguaje humano –específicamente el verbal– no es la excepción, toda vez que es resultado de la Naturaleza y nuestra actividad mental.

Con todos los atributos de una organización tan compleja como es la vida (a pesar de que en los orígenes reinaba lo simple... una masa de densidad infinita era todo lo que existía antes del gran estallido, el súbito nacimiento) resulta extensa la explicación sobre el cómo llegamos a ser lo que somos y merecer un nombre.

“Un nombre representa a una entidad permanente o conjunto de átomos suficientemente estables”, según el biólogo neo-darwinista Richard Dawkins. Pero a mí se me ocurre un contraejemplo bien especial: la lluvia. Cada una de las pequeñas gotas de agua que la compone tiene una duración realmente muy breve. En efecto, podríamos calcular los segundos de su existencia aplicando la sencilla fórmula de caída libre. También su nomenclatura química es sumamente básica, y su magnitud es mínima (como dicen los ingenieros, de orden “despreciable”). Sin embargo, más allá de su definición, que no hace más que acotarla, hay algo fascinante detrás de ella, en su sonido, en la reiteración de la inevitable caída.

La lluvia también es parte de un ciclo en la Naturaleza, es simple, y las cosas simples suelen ser las más bellas. Y si nos viéramos nosotros mismos como una gota de agua que cae, confrontándonos a la Humanidad toda, a la Historia y la Cultura, advertiríamos que somos también –y de la misma forma– despreciables.

## SEGUNDA PARTE: LA GEOMETRÍA FRACTAL DEL UNIVERSO <sup>[1]</sup>

Cuentan que a Mitchell Feigenbaum, pionero de la Teoría del Caos, le quitaron la prestación de transporte aéreo gratuito que se otorga a los científicos estadounidenses, por usarlo demasiado. Feigenbaum viajaba en avión, no por viajar de prisa, sino para observar las nubes.

Las nubes son fractales, los árboles son fractales, el dibujo del borde de una costa es fractal, la nieve, las montañas, ciertas melodías de Beethoven y Mozart son fractales. Y el universo. El universo se ordena y expande a través de esta bellísima geometría exactamente igual a como se formaron las redes dendríticas de las neuronas de nuestro sistema nervioso.

Comenzar a hablar sobre fractales puede llegar a tomar un tiempo infinito, literalmente. Ellos se expresan y definen en la Naturaleza bajo formas extraordinarias. Han estado aquí desde siempre. Como nos comenta Benoît Mandelbrot, en una de sus charlas: “la fracturación es y será parte de la vida humana eternamente. Desde la Antigüedad, nos ha parecido incontrolable y de una complejidad extrema: un absoluto desorden”. Sin embargo, Mandelbrot descubrió un orden en esa fracturación. Algo tan complicado como una nube, tan inestable, tan variable, debería seguir entonces una ley muy simple: se trata de iterar e iterar la función  $f: z \rightarrow z^2 + c$ , en un plano donde un eje representa los números reales y el otro los complejos. Lo que se obtiene es una figura o imagen matemática (que depende del parámetro  $c$ ) de gran complejidad, y al hacer miles de millones de ampliaciones (zoom-in) en la figura descrita, siempre seguirán surgiendo detalles con infinita precisión.

**La propiedad fundamental de los fractales es la autosemejanza, que se refiere a una cierta invariabilidad con relación a la escala, o dicho de otro modo, al acercarse a ciertas partes de la imagen reaparece en miniatura la imagen total.**

Lo que es notable y, de hecho, asombroso, acerca del Conjunto-Mandelbrot <sup>[2]</sup> es que a pesar de su elevada complejidad se basa en principios increíblemente simples, a diferencia de casi todo en Matemática Moderna. De hecho, pudo haberse descubierto en cualquier momento de la Historia, y no recién en los 80's, pero el problema es éste: aunque la función se basa únicamente en sumar y multiplicar, se deben realizar las iteraciones millones y millones de veces para crear un solo conjunto completo... y ésa es la razón por la que no se descubrió sino hasta la era de los computadores. Las imágenes de los fractales obtienen sus formas cuando le asignamos un rango determinado de colores a una serie de puntos, dependiendo de su comportamiento matemático

mientras se resuelve la función, con la ayuda indispensable de un computador. En efecto, ésa es la única manera de captarlos visualmente.

Fue entonces, que durante el 1° de Marzo de 1980, en un centro de investigaciones de la IBM, que Benoît Mandelbrot vislumbró por primera vez el conjunto que lleva su nombre. El origen de este descubrimiento ocurre una década antes... en París, cuando el Matemático Gastón Julia publicó unos papers vinculados a los números complejos, cuyos resultados se conocen actualmente como los Conjuntos-Julia. A partir de ellos, y de la observación de la Naturaleza, Mandelbrot descubrió los fractales. Los que hoy en día están siendo estudiados en diversos campos de la Ciencia, Arte y Tecnología.

Algunas de las aplicaciones más concretas realizadas en base a la teoría fractal, se presentan en el análisis de mercados financieros, en la Música <sup>[3]</sup> y en el desarrollo de nuevos sistemas digitales capaces de aumentar —mediante interpolaciones y predicciones— notablemente la resolución de imágenes para poder transmitir a través de satélites una gran cantidad de información, lo que incluso deriva en una enorme importancia militar <sup>[4]</sup>.

### TERCERA PARTE: LAS ITERACIONES / LA DESTRUCCIÓN DE LAS PALABRAS

Vicenzo Galilei fue un compositor italiano, teórico de la música y una importante figura del Renacimiento. Sus descubrimientos en Acústica y en Física de vibración de cuerdas influyeron profundamente en su hijo, Galileo: lo apartó de las fórmulas de la Matemática pura que regían aquella época y lo introdujo en la observación de la Naturaleza, para explicar los resultados con una Matemática más empírica. Si no fuera por su padre, Galileo seguramente se hubiera hecho sacerdote o pintor y quizá ahora nadie lo recordaría.

Emmy Nöether fue una niña que nació en Alemania, en 1882, en el seno de una familia judía acaudalada. Su padre fue el matemático Max Nöether quien le aconsejó desde pequeña que se dedicara a enseñar francés o inglés. Entonces Emmy, tras aprobar los exámenes requeridos para ello, decidió en el último minuto matricularse en otra carrera, e ingresó a Matemáticas en la Universidad de Erlangen-Núremberg, donde su mismo padre impartía clases. Hoy en día, Emmy es conocida por sus contribuciones de valor imprescindible en los campos de la Física teórica y el Álgebra Abstracta. Fue considerada por David Hilbert y Albert Einstein como la mujer más importante en la historia de la Matemática: ella revolucionó las teorías de anillos, cuerpos y álgebras. En Física, el teorema de Nöether explica la conexión fundamental entre la simetría en Física y las leyes de conservación.

Quizás, el mundo es un fractal. Y nosotros, como parte de esta composición que se llama mundo también lo somos... somos una fracción de la Naturaleza, tal vez, una iteración. La Bioestadística señala que el aumento exponencial de densidad poblacional es peligroso, a finales del 2011 en nuestro planeta residirán más de 7 mil millones de personas. Un número bastante similar a la

cantidad de iteraciones que se deben realizar para que un solo Conjunto-Mandelbrot o fractal matemático se pueda vislumbrar.

La ruptura entre la densidad Matemática y la realidad visible, en cierto modo posee una analogía lingüística. En el fondo de sí mismo, el Lenguaje tiene por función el nombrar, es decir, el hacer surgir una representación y señalarla (como una indicación, y no un juicio). La idea de que, al destruir las palabras, éstas no son ni ruidos ni puros elementos arbitrarios, sino que lo que se encuentra son otras palabras que, pulverizadas a su vez, liberan otras, trae consigo ciertas preguntas. ¿A qué se debe que algunas palabras, en su esencia primera, siendo nombres y designaciones, articuladas de acuerdo con el análisis de la representación misma, puedan alejarse irresistiblemente de su significado original, y adquirir un sentido más cercano, más amplio o más limitado?<sup>[5]</sup> ¿Existen algunos sentidos que se hayan perdido y no se recuperen ya? ¿Qué es lo que nos define?

“De las leyes más simples, nacen infinitas maravillas que se repiten indefinidamente”<sup>[6][7]</sup>.

En el caos siempre existe la paradoja. Y la paradoja aquí es que lo simple y lo complejo parecen ser reflejos lo uno de lo otro: son dos cosas inseparables. Los fractales están generados por fórmulas muy simples, pero son figuras de inagotable complejidad. Del mismo modo, cada uno de nuestros actos, que conforman nuestra existencia, da origen a consecuencias que repercuten en otros. Vemos así los casos de Galileo y Emmy, ejemplos particulares de personas que en un punto determinado de sus vidas debieron tomar una decisión, y en base a ella, cambiaron parte de la Humanidad, la Historia y la Cultura. Fueron esa gota de agua de magnitud “despreciable” que cae inevitablemente, fueron parte de una gran lluvia y la cambiaron.

Una persona libre se define como alguien que va y toma lo que quiere, a veces una cometa vuela más alto cuando el viento está en contra. Después de todo, las especies que no son capaces de cambiar, son las que se extinguen.

Quizás el sonido de la lluvia también es fractal... pero aún no hay estudios al respecto.

América Merino

14 de Octubre del 2011 (Primer aniversario del fallecimiento de Benoît Mandelbrot)

## NOTAS

1. La geometría del universo es fractal. La distribución de la materia en el espacio, existente desde hace 14 mil millones de años, ordenada por la gravedad y la expansión cósmica, ha agrupado las estrellas para formar galaxias, las galaxias para formar cúmulos, y cúmulos en supercúmulos. Según un grupo de físicos, como Francesco Sylos del Centro de Enrico Fermi y Luciano Pietronero de la Universidad de Roma, argumentan que el Universo se muestra fractal, tan lejos como nuestros telescopios pueden ver.
2. Técnicamente, el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de valores de  $C$  en el plano complejo para el que la órbita de  $0$  bajo la iteración del polinomio cuadrático complejo  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$  sigue siendo limitada. Es decir, un número complejo,  $C$ , es parte del conjunto de Mandelbrot, si, cuando a partir de  $Z_0 = 0$  y la aplicación de la iteración en varias ocasiones, nunca el valor absoluto de  $Z$  excede un cierto número (ese número depende de  $C$ ) por muy grande que  $n$  se haga.

Sea  $c$  un número complejo cualquiera. A partir de  $c$ , se construye una sucesión por inducción:

$$\begin{cases} Z_0 = 0 & \text{(término inicial)} \\ Z_{n+1} = Z_n^2 + C & \text{(relación de inducción)} \end{cases}$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que  $c$  pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo. Por ejemplo, si  $c = 1$  obtenemos la sucesión  $0, 1, 2, 5, 26\dots$  que diverge. Como no está acotada,  $1$  no es un elemento del conjunto de Mandelbrot. En cambio, si  $c = -1$  obtenemos la sucesión  $0, -1, 0, -1, \dots$  que sí es acotada, y por tanto,  $-1$  sí pertenece al conjunto de Mandelbrot.

3. MÚSICA FRACTAL es cualquier sonido que se genera y reproduce según patrones de comportamiento espontáneo predominantes en el medio natural. En la actualidad, los algoritmos matemáticos que controlan el software específico generan partituras y composiciones de una fisiología pareja a las estructuras que la geometría fractal nos proporciona.

EL SONIDO DE LOS NÚMEROS. Una forma sencilla de crear una melodía es partir de una secuencia de números enteros positivos e ir asignando a cada uno una determinada nota musical, por ejemplo, do para el 1, re para el 2, etc. Para obtener un buen resultado es necesario que los valores de la secuencia estén acotados de manera que las notas generadas no pertenezcan a octavas muy alejadas.

4. Sistema desarrollado por el científico estadounidense Michael Barnsley.
5. Michael Foucault.
6. Benoît Mandelbrot.
7. En cierto modo, otro buen ejemplo es una fórmula muy simple de Newton que también, con pocos símbolos, permite explicar el movimiento de los planetas alrededor del sol ( $F = Gm_1m_2/r^2$ ).